



TITLE:

geodesic Links in  $S^3$

AUTHOR(S):

作間, 誠

---

CITATION:

作間, 誠. geodesic Links in  $S^3$ . 数理解析研究所講究録 1987, 624: 237-254

ISSUE DATE:

1987-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99920>

RIGHT:

## Geodesic Links in $S^3$

大阪市大・理 作間 誠 (Makoto SAKUMA)

針金で作った結び目も無重力空間の中に置き、それを帯電してやると、クーロンの法則に従って結び目の各部分は反発し合い、空間の中にできるだけ均等に広がるようにするであろう。そして、力のバランスが取れ、安定状態になった時の結び目の位置は、その knot type の特徴 (特に対称性) を良く反映しているのではないだろうか。この素朴な考えは次の様な問題として述べる事ができる。

各埋め込み  $S^1 \hookrightarrow S^3$  に対して "エネルギー" を定義し、その極値を与えるものとして、knot type の "標準的位置" というものを選び出せたりだろうか？ もし、その様なものがあれば、knot の性質、特に対称性とどの様な関係があるか？

この問題を、 $S^3$  内の大円で作る link (geodesic link)

に限って考察するのが、本論の目的である。

## §1. Geodesic Links in $S^3$

$S^3$  を 4次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  内の単位球面とする。

この時、 $S^3$  内の geodesic は 原点を通る 2-plane  $P$  と  $S^3$  の交わりとして得られる。従って  $S^3$  内の geodesic (resp. oriented geodesic) 全体が作る空間  $\mathcal{G}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{G}}$ ) は Grassmann manifold  $Gr_2(\mathbb{R}^4)$  (resp. oriented Grassmann manifold  $\tilde{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$ ) と同一視される。互いに交わる二つの geodesic から成る  $S^3$  内の link を geodesic link と呼ぶ。二つの geodesic link  $L$  と  $L'$  が geodesic link であるという性質を保ったまま  $S^3$  の ambient isotopy で重なる時、 $L$  と  $L'$  は rigidly isotopic であると言ひ、 $L \cong L'$  で表わす。

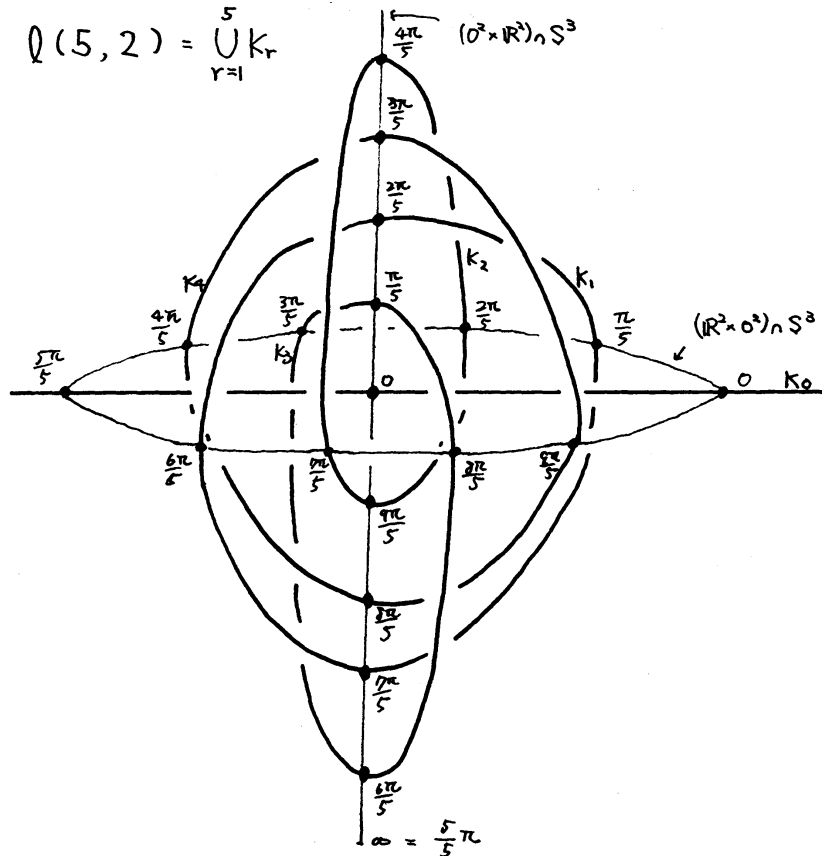
Viro [7] は 5 component 以下の geodesic link の rigid isotopy による分類を行ひ、次の結果を得ている

component の数	1	2	3	4	5	6	7
isotopy class の数	1	1	2	3	7	15	34
hyperbolic link の数	0	0	0	0	1	1	8
							?

上の表で component 数が 6, 7 の場合は、筆者が数え挙げたものに、多分この数で良いと思うが、まだ確定はしてない。

この様に、geodesic link は非常に特殊な対象ではあるが、  
 次の様にして、Knot theorist と顔なじみの話ひ目から自然に  
 出てくる系列がある。今、 $K$  を spherical Montesinos knot  
 - double cover  $\Sigma_2(K)$  が spherical manifold とする knot -  
 とする。この時、 $\Sigma_2(K)$  の universal cover  $\widetilde{\Sigma_2(K)}$  は  $S^3$  と  
 なり、分岐被覆  $p: S^3 = \widetilde{\Sigma_2(K)} \longrightarrow S^3$  を得るが、  
 $\downarrow$   
 $\Sigma_2(K)$

射影  $p$  による  $K$  の逆像  $p^{-1}(K)$  は geodesic link である。  
 例えば、2-bridge knot  $K(p, q)$  から、この様にして得られる  
 link  $l(p, q)$  は下図の link とする。(例 3.5 参照)



尚、Burde [1] は  $l(p, q)$  の linking number を使って 2-bridge knot の分類を行っている。

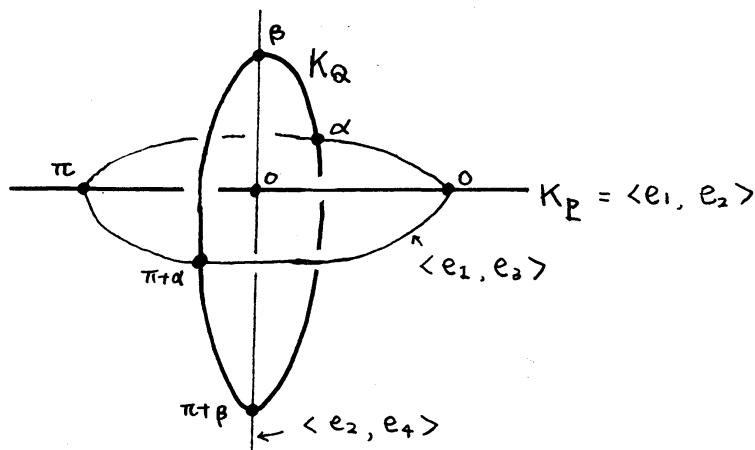
## §2. Geodesic link の energy

$P, Q \in G_2(\mathbb{R}^4)$  の元とする。(原点を通る)  $P$  上の line と平面  $Q$  が成す角度の内、最大のものを  $\alpha$ , 最小のものを  $\beta$  と置く。この pair を  $P$  と  $Q$  の principal angle と呼ぶ。この時、 $P$  と  $Q$  の位置関係は principal angle  $\alpha, \beta$  で定まる。

命題 2.1 (Gluck-Warner [3])  $\mathbb{R}^4$  の正規直交基底  $e_1, e_2, e_3, e_4$  で次の条件を満たすものがある。

$$\begin{cases} P = \langle e_1, e_2 \rangle \\ Q = \langle \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_3, \cos \beta \cdot e_2 + \sin \beta \cdot e_4 \rangle \end{cases}$$

対応する geodesic link  $K_P \cup K_Q$  は次で与えられる。



定義 2.2 (1)  $e(K_P, K_Q) \equiv \cot^2 \alpha + \cot^2 \beta \in K_P \vee K_Q$  のエネルギーと呼ぶ。

(2) Geodesic link  $L = \bigcup_{r=1}^n K_r$  に対して

$e(L) \equiv \sum_{1 \leq r < s \leq n} e(K_r, K_s)$  を  $L$  のエネルギーと呼ぶ。

Principal angle が共に  $\pi/2$  となる時  $e(K_P, K_Q) = 0$  となり、 $\alpha$  または  $\beta$  が 0 に近づく時、 $K_P$  と  $K_Q$  は接近するが、これにともない、エネルギーも無限大に発散する。

例 2.3  $l(p, q) = \bigcup_{r=1}^p K_r$  のエネルギー

$$\begin{aligned} e(l(p, q)) &= \sum_{1 \leq r < s \leq p} e(K_r, K_s) \\ &= \sum_{1 \leq r < s \leq p} \left\{ \cot^2 \frac{r-s}{p} \pi + \cot^2 \frac{(r-s)}{p} \pi \right\} \\ &= p \sum_{k=1}^{p-1} \cot^2 \frac{k\pi}{p} \\ &= \frac{1}{3} p(p-1)(p-2) \end{aligned}$$

となり、整数値を取る。ここで最後の等号は Hirzebruch-Zagier [4] Chapter II に依る。

例 2.4 Hopf fibration  $h: S^3 \rightarrow S^2$  による  $S^2$  内の有限点集合の逆像は geodesic link になるが、その点集合を正多面体の頂点に置いた時のエネルギーは次の様だ

整数値と出る。

頂点の数	4	6	8	12	20
正n面体	4	8	6	20	12
エネルギー	6	24	60	180	720
	"	"	"	"	"
	1·2·3	2·3·4	3·4·5	3 <sup>2</sup> ·4·5	4·5·6 <sup>2</sup>

### §3. 基本的な事実と定義

Oriented Grassmann manifold  $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$  の構造を Gluck-Warner [3] に従って解説する。Oriented 2-plane  $P \in \widetilde{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$  に対して、正規直交基底  $u, v$  を取り、その外積  $u \wedge v \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$  を考えると、これは  $u, v$  の取り方に依らない。対応  $P \mapsto \omega_P \equiv u \wedge v$  により、 $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$  は  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$  内の単位球面に埋め込まれる。一方  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$  上には  $*$  operation  $\omega \mapsto \omega^*$  が、 $\omega \wedge \eta^* = \langle \omega, \eta \rangle \Omega \in \Lambda^4 \mathbb{R}^4$  を満たすものとして定義されている。ここで  $\langle, \rangle$  は  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$  上の標準的な内積で、 $\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^4 \mathbb{R}^4$  である。この時  $(\omega_P)^*$  は  $P$  の直交補空間  $P^\perp$  から定まる元  $\omega_{P^\perp}$  に一致することに注意されたい。 $*$ -operator は  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$  上の involution であり、 $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$  は 固有空間  $E_+ = \{ \omega \mid \omega^* = \omega \}$  と  $E_- = \{ \omega \mid \omega^* = -\omega \}$  の orthogonal sum に分解される。この時、 $E_+ \cong E_- \cong \mathbb{R}^3$  であり、 $S_\pm^2 = \{ \omega \in E_\pm \mid \|\omega\| = 1/\sqrt{2} \}$

とあると  $\omega_P \in S_+^2 \times S_-^2$  と得る。

$$\begin{aligned} \text{命題 3.1 [3]} \quad \widetilde{G} &\cong \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4) \cong S_+^2 \times S_-^2 \\ G &\cong G_2(\mathbb{R}^4) \cong S_+^2 \times S_-^2 / (\omega_+, \omega_-) \sim (-\omega_+, -\omega_-) \end{aligned}$$

今  $P, Q \in \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4)$  が与えられたとある。対応する  $S_+^2 \times S_-^2$  の元を  $(\omega_P^+, \omega_P^-), (\omega_Q^+, \omega_Q^-)$  とし、 $\theta^\pm = \arg(\omega_P^\pm, \omega_Q^\pm)$  と置く。次に成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{命題 3.2 (1) [3]} \quad P \text{ と } Q \text{ の principal angle を } \alpha, \beta \\ \text{とあると} \quad \begin{cases} \theta^+ = \alpha - \beta \\ \theta^- = \alpha + \beta \end{cases} \text{ である。} \end{aligned}$$

特に  $K_P \cap K_Q = \emptyset$  であるためには  $\theta^+ \neq \theta^-$  となる事が必要十分である。

$$(2) \quad e(K_P, K_Q) = 2 \times \frac{2 - \{ \langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle^2 + \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle^2 \}}{\{ \langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle - \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle \}^2}$$

但し、 $\langle, \rangle$  は  $E_\pm$  の内積を 2 倍して、 $S_\pm^2$  が単位球面となる様に正規化したもの。

次に  $n$ -component geodesic link 全体が作る空間を考える。  
 $\Delta_n = \{ (K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{G}^n \mid K_r \cap K_s \neq \emptyset \text{ for some } r \neq s \}$  とある。



$n$  次の置換群  $G_n$  は  $Q^n$  に成分の入れ替えとして作用するが、 $\Delta_n$  はこの作用に関して (setwise に) 不変である。この時、 $\mathcal{L}_n \equiv Q^n - \Delta_n / G_n$  は unoriented, unordered, geodesic link 全体の成る空間となり、non-compact, disconnected,  $4n$ -dim. manifold となる。そして  $\mathcal{L}_n$  の連結成分が  $n$ -component link の rigid isotopy type に対応している。 $S^3$  の (orientation-preserving) isometry group  $Isom^+ S^3$  は  $\mathcal{L}_n$  に作用し、その商空間  $\tilde{\mathcal{L}}_n = \mathcal{L}_n / Isom^+ S^3$  は  $S^3$  の剛体変換で移る link を同一視して得られる空間である。これはもはや多様体ではない。エネルギー関数  $e: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  は  $Isom^+ S^3$  の作用で不変であるので、 $e: \tilde{\mathcal{L}}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  を導く。

定義 3.3 (1)  $L \in \mathcal{L}_n$  が minimal position にあるとは  $L$  を含む  $\mathcal{L}_n$  の連結成分上で  $e(L)$  が  $e$  の最小値になる時をいう。

(2)  $L \in \mathcal{L}_n$  が harmonic position にあるとは、 $L$  が  $e: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$  の critical point になる時をいう。

$\mathcal{L}_n$  の各連結成分  $\mathcal{U}$  に対して、 $(e|_{\mathcal{U}})^{-1}[0, c]$  ( $c \in \mathbb{R}^+$ ) は compact であるので、geodesic link の各 rigid isotopy class は minimal position にある link を含む。

$L$  を harmonic position にある link,  $d^2e_L: T_L\mathcal{L}_n \times T_L\mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $L$  に於ける  $e$  の Hessian とする。  $\mu_L: \text{Isom}^+ S^3 \rightarrow \mathcal{L}_n$  を  $\mu_L(g) = gL$  で定めると,  $d\mu_L(T_e \text{Isom}^+ S^3)$  は  $d^2e_L$  の null space になる。

定義 3.4 Harmonic position にある link  $L$  が stable であるとは  $d^2e_L$  が  $T_L\mathcal{L}_n / d\mu_L(T_e SO(4))$  上の positive definite form であるときをいう。 そうでない時,  $L$  は unstable であるという。

以下, 本論では 次の問題を考察する。

問題  $L$  が 対称性の高い位置にあるならば harmonic か? stable か? 又, 逆に, (stable) harmonic position にある link から, その link type が持つ対称性を読み取れるか?

次のセクションへ移る前に,  $\text{Isom}^+ S^3$  の  $\tilde{\mathcal{G}}$  への作用を記述しておく。  $\mathbb{R}^4$  を 4元数体  $\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle$  と同一視し,  $S^3$  をその単位球,  $S^2 = S^3 \cap \langle i, j, k \rangle$  とする。  $S^3$  は 積に関して群を成し,  $\text{Isom}^+ S^3$ ,  $\text{Isom}^+ S^2$  は 次の様に記述される。(cf [6])

$$1 \rightarrow \langle (-1, -1) \rangle \rightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{\phi} \text{Isom}^+ S^3 \rightarrow 1$$

$$\text{但し } \phi(g_1, g_2) : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3 \\ g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$$

$$1 \rightarrow \langle -1 \rangle \rightarrow S^3 \xrightarrow{\psi} \text{Isom}^+ S^2 \rightarrow 1$$

$$\text{但し } \psi(g) : S^2 \xrightarrow{\cong} S^2 \\ w \mapsto g w g^{-1}$$

$E_{\pm}$  の直交基底として次が取れる。

$$\begin{cases} \varepsilon_i^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge i \pm (1 \wedge i)^* \} \\ \varepsilon_j^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge j \pm (1 \wedge j)^* \} \\ \varepsilon_k^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge k \pm (1 \wedge k)^* \} \end{cases}$$

$\varepsilon_i^{\pm}, \varepsilon_j^{\pm}, \varepsilon_k^{\pm}$  に  $i, j, k$  を対応させると相似写像  $E_{\pm} \rightarrow \langle i, j, k \rangle$  (伸張率  $= \sqrt{2}$ ) が得られるが、これにより  $S_{\pm}^2$  は単位球  $S^2 \subset \langle i, j, k \rangle$  と同一視できる。この時、 $\phi(g_1, g_2) \in \text{Isom}^+ S^3$  の  $\tilde{g}$  への作用  $\phi_*(g_1, g_2)$  は次で与えられる。

$$\phi_*(g_1, g_2) = \psi(g_1) \times \psi(g_2) : S_+^2 \times S_-^2 \rightarrow S_+^2 \times S_-^2$$

この時、 $\tilde{g}$  の自然なリーマン計量に関して、 $\text{Isom}^+ S^3$  は  $\tilde{g}$  の isometry として作用していることに注意したい。

例 3.5  $p$  と  $q$  を互いに素な自然数とする。

$$G_{p, q} = \langle (e^{i \frac{q}{p} \pi}, e^{i \frac{p}{q} \pi}), (j, j) \rangle \subset S^3 \times S^3 \quad \text{とすると}$$

$\phi(G_{p,g})$  は order  $2p$  の dihedral group  $D_p$  になり.

$\text{Fix } \phi(G_{p,g}) = \ell(p,g)$  を得る.  $\ell(p,g)$  の components  $\{K_r \mid 0 \leq r \leq p-1\}$  は  $\pi$  で 5 区間ある.

$$K_r \leftrightarrow (e^{i \frac{2\pi(r+1)}{p}} \cdot j, e^{i \frac{2\pi(r-1)}{p}} \cdot j) \in S_+^2 \times S_-^2$$

#### § 4. The principle of symmetric criticality

定理 4.1 geodesic link  $L$  が  $\text{Isom}^+ S^3$  の有限部分群  $G$  の固定点集合  $\text{Fix } G = \{x \in S^3 \mid \text{st}_G(x) \neq \{1\}\}$  になるならば,  $L$  は harmonic position にある。

これより  $\ell(p,g)$  が harmonic であるのかわかる。この定理は、Symmetric Criticality の原理 (Palais [5] 参照) より得られる 次の定理の特別な場合である。

定理 4.2  $G$  を  $\text{Isom}^+ S^3$  の有限部分群とする。もし geodesic link  $L \in \mathcal{L}_n$  が  $G$  の  $\mathcal{L}_n$  への作用  $G \times \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$  の孤立固定点であるならば、 $L$  は Harmonic position にある。

(証明: [5] 参照)  $e: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $G$ -invariant であるので gradient vector field  $\text{grad } e$  は  $G$ -invariant

である。一方  $L$  は  $G: L_n \supset$  の isolated fixed point であるので  $\text{Fix}[dG: T_L L_n \supset] = \{0\}$  ととり、従って  $\text{grade}_L = 0$  ととり  $de_L = 0$  を得る。

$L \in L_n$  が有限群作用の孤立固定点であるための条件は次で与えられる。

命題 4.3  $G \in \text{Isom}^+ S^3$  の有限部分群,  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  を  $G$ -不変な geodesic link とする。この時、 $L$  が  $G$  の  $L_n$  への作用の孤立固定点であるための必要十分条件は、各  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) に  $\exists T(2)$   $K_r$  が  $\text{st}_G(K_r) = \{g \in G \mid g(K_r) = K_r\}$  の  $Q$  への作用の孤立固定点とすることを要する。

命題 4.4  $H \in \text{Isom}^+ S^3$  の有限部分群,  $K$  を  $H$ -不変な geodesic とする。 $K$  が  $H$  の  $Q$  への作用の孤立固定点となるための必要十分条件は、 $H$  が次の (1) または (2) の形の群と  $\text{Isom} S^3$  内で conjugate であり、かつ

$$(1) \quad \langle \phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_n$$

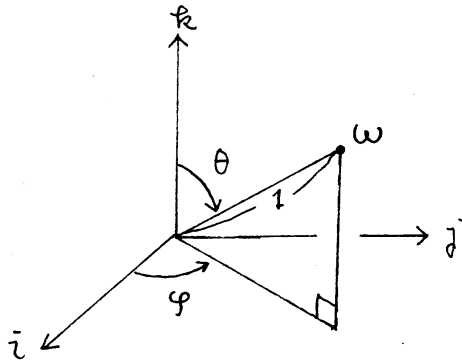
$$\left( \text{Fixed points on } Q = S^2 \times \{\pm i\} \subset Q \right)$$

$$(2) \quad \langle \phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}), \phi(i, k) \rangle \cong D_n$$

$$\left( \text{Fixed points on } Q = S^1 \times \{\pm i\} \subset Q \right)$$

## §5. Calculation

$\tilde{g} \cong S_+^2 \times S_-^2$  の点を記述するために、各  $S_\pm^2$  に次の様な極座標  $(\theta^\pm, \varphi^\pm)$  を導入する。


 $(\theta, \varphi)$ 
 $\Downarrow$ 

$$\sin\theta \cos\varphi \cdot i + \sin\theta \sin\varphi \cdot j + \cos\theta \cdot k$$

Oriented geodesic knot  $K = (\omega^+, \omega^-) \in S_+^2 \times S_-^2 = \tilde{g}$  は

4つの角度の組  $((\theta^+, \varphi^+), (\theta^-, \varphi^-))$  で表わされる。

二本の geodesic knot  $K_r = (\omega_r^+, \omega_r^-) = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-))$

( $r=1, 2$ ) に対して、その間のエネルギー  $e = e(K_1, K_2)$  は次の様に与えられる (命題 3.2)。

$$e = 2 \times \frac{2 - \{A_+^2 + A_-^2\}}{\{A_+ - A_-\}^2}$$

$$\text{但し } A_\pm = \langle \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \rangle$$

$$= \cos\theta_1^\pm \cos\theta_2^\pm + \sin\theta_1^\pm \sin\theta_2^\pm \cos(\varphi_1^\pm - \varphi_2^\pm)$$

従って  $e$  の全微分  $de$  は次で与えられる。

$$de = \frac{4}{\{A_+ - A_-\}^3} \times \left[ \{A_-^2 + A_+ A_- - 2\} dA_+ + \{-A_+^2 - A_+ A_- + 2\} dA_- \right]$$

ここに  $dA_\pm$  は  $d\theta_1^\pm, d\theta_2^\pm, d\varphi_1^\pm - d\varphi_2^\pm$  の一次結合である。

2 階の全微分 (= Hessian) は 8 次の対称行列で表わされるが、一般形は複雑なのでここで書き下すのはやめ、次の特別な場合のみを考える。

Case 1  $\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \frac{\pi}{2}$  の場合

例 3.5 の  $l(p, \varphi)$  はこの条件を満たす。

Case 2  $(\theta_1^-, \varphi_1^-) = (\theta_2^-, \varphi_2^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  の場合

Hopf fibration の逆像を 12 個得られる link (multiple Hopf link) はこの条件を満たす。

Case 1  $\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \pi/2$  の場合。

この時、 $d^2e$  は 3 つの 2 次形式の直和  $E(\varphi) + E(\theta^+) + E(\theta^-)$  に分解される。各成分は次の通りである。

$$\begin{aligned} E(\varphi) = & \left\{ \frac{3}{2} \cot^4 \tau^+ + 2 \cot^2 \tau^+ \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \cot^4 \tau^- + 2 \cot^2 \tau^- \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) - (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\ & + (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+)^2 + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\theta^+) = & \left\{ 1 + \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- + (\cot \tau^+ - \cot \tau^-)^2 \right\} \\ & \times \left[ \left\{ 1 - \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^+)^2 + (d\theta_2^+)^2 \right\} + \frac{2}{\sin \tau^+ \cdot \sin \tau^-} \cdot d\theta_1^+ d\theta_2^+ \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\theta^-) = & \left\{ 1 - \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- + (\cot \tau^+ + \cot \tau^-)^2 \right\} \\ & \times \left[ \left\{ 1 + \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^-)^2 + (d\theta_2^-)^2 \right\} + \frac{-2}{\sin \tau^+ \cdot \sin \tau^-} \cdot d\theta_1^- d\theta_2^- \right] \end{aligned}$$

$$\text{但し } \tau^+ = \frac{1}{2} \{ (\varphi_1^+ - \varphi_2^+) + (\varphi_1^- - \varphi_2^-) \}$$

$$\tau^- = \frac{1}{2} \{ (\varphi_1^+ - \varphi_2^+) - (\varphi_1^- - \varphi_2^-) \}$$

∴  $E(\varphi)$  は 2 次元 null space  $\{d\varphi_1^\pm = d\varphi_2^\pm\}$  を持つ positive form である事に注意する。

今、harmonic position にある geodesic link  $L = \bigcup_{r=1}^n K_r$   
 $(K_r = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-)))$  が 条件  $\theta_r^\pm = \pi/2$  ( $1 \leq r \leq n$ )

を満たすとする。  $d^2e(L) = \sum d^2e(K_r, K_s)$  であるので、

$L$  は  $\varphi_r^\pm$  方向に関して安定となり、残りの  $\theta_r^\pm$  方向についてのみ調べれば良いことになる。特に、 $\ell(p, g)$  における Hessian  $d^2e$  は次の形となる。

$$\begin{array}{c} d\theta^+ \quad d\theta^- \quad d\varphi^+ \dots d\varphi^- \dots \\ \begin{array}{c} d\theta^+ \\ d\theta^- \\ d\varphi^+ \\ d\varphi^- \end{array} \left[ \begin{array}{cc|c} E^+(p, g) & 0 & \\ \hline 0 & E^-(p, g) & \\ \hline & & \text{positive} \end{array} \right] \end{array}$$

∴  $E^+(p, g) \cong E^-(p, p-g)$  である事がわかる。

又、dihedral group  $D_p$  の isometry として作用している事より、 $E^+(p, g)$  の固有値  $\{\alpha_u^+\}_{u=0}^{p-1}$  は次で与えられるのがわかる。

(i)  $p: \text{odd}$  の時  $\tau = 2\pi/p$  とすると

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ 1 + \omega^u r \tau \cdot \omega^u r g \tau + (\omega^u r \tau - \omega^u r g \tau)^2 \right\} \left\{ \frac{\omega^u r \tau - \omega^u (1+g) r \tau}{\sin r \tau \cdot \sin r g \tau} \right\}$$



(ii)  $p$ : even の時  $\tau_0 = \pi/p$  とすると

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ 1 + \cot r\tau_0 \cdot \cot r g\tau_0 + (\cot r\tau_0 - \cot r g\tau_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\omega \cdot 2ur\tau_0 - \omega(1+g)r\tau_0}{\sin r\tau_0 \cdot \sin r g\tau_0} \right\}$$

$p \leq 5$  の時の  $d^2e$  の  $d\theta_r^2$  方向の固有値は次の様になる。

$(p, g)$	固有値
(2, 1)	2, 2, 0, 0
(3, 1)	8, 8, $16/3$ , 0, 0, 0
(4, 1)	32, 18, 18, 10, 0, 0, 0, -6
(5, 1)	72, 72, 32, 32, 16, 0, 0, 0, -16, -16
(5, 2)	24, 24, 24, 24, 16, 16, 0, 0, 0, 0

従って  $l(2, 1)$ ,  $l(3, 1)$ ,  $l(5, 2)$  は安定であるが,  $l(4, 1)$ ,  $l(5, 1)$  は不安定である。又、 $p \geq 6$  の時は全ての  $l(p, g)$  は不安定であり、 $\dim(\text{negative space}) < \frac{1}{4} \dim L_p$  が成り立つ様である。 $l(p, g)$  が amphicheiral の時は、各成分一本ずつの変動に関しては安定である事がわかる。

Case 2  $(\theta_r^-, \varphi_r^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ( $r=1, 2$ ) の場合

この時、 $de = \frac{1}{(A_+ - 1)^2} dA_+$  であり、 $d^2e$  は 3 個の二次形式の直和  $E(\theta^+, \varphi^+) + E(\theta^-) + E(\varphi^-)$  に分解する。各成分は次で与えられる。

$$E(\theta^+, \varphi^+) = \frac{4}{(1-A_+)^2} d^2 A_+ + \frac{8}{(1-A_+)^3} (dA_+)^2$$

$$E(\theta^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3} (d\theta_1^- - d\theta_2^-)^2$$

$$E(\varphi^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3} (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2$$

ここで  $de$  は  $d\theta_r^+, d\varphi_r^+ (r=1,2)$  のみの一次結合であり、

$E(\theta^-), E(\varphi^-)$  は positive form である事に注意されたい。

従って任意の (multiple) Hopf link は Hopf fibration を崩す方向の変動に関しては、安定な特異点である。よって Hopf link が harmonic であるかどうか、又安定であるかどうかという問題は、対応する  $S^2$  上の point configuration の問題に置き換えられる。

付記 津田塾大学の福原真二氏も同様の発想を以前から持っており、本論とは異なる方向から knot の標準的位置の研究をされている ([2])。

References

- [1] G. Burde: Verschringungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken, Math. Z. 145 (1975) 235-242.
- [2] S. Fukuhara: Lecture at Tsuda college, 1986
- [3] H. Gluck and F.W. Warner: Great circle fibrations of the three sphere, Duke Math. J. 50 (1983) 107-132.
- [4] F. Hirzebruch and D. Zagier: The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory, Math. Lect. Nore Series 3, Publish or Perish Inc.
- [5] R.S. Palais: The principle of symmetric criticality, Commun. Math. Phys. 69 (1979) 19-30.
- [6] P. Scott: The geometry of three manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983) 401-487.
- [7] O.Ya. Viro: Topological problems concerning lines and points of three-dimensional space, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 528-531.